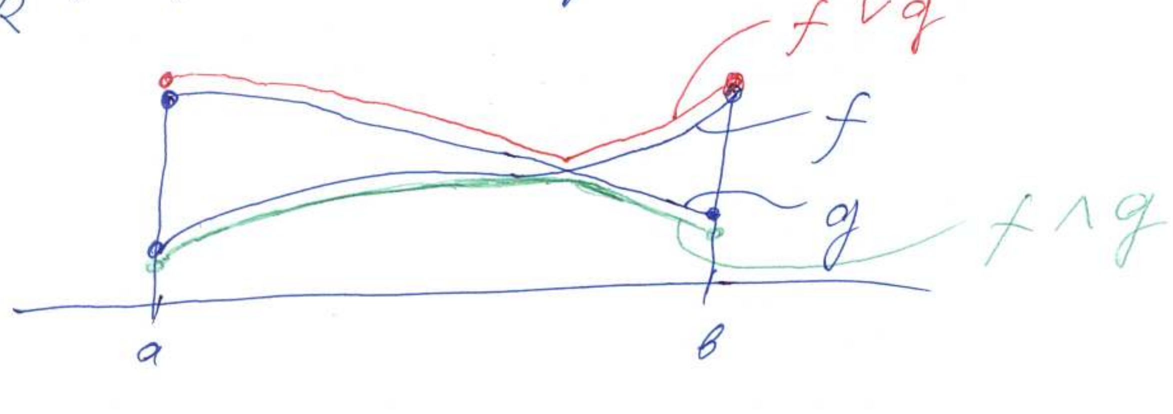
1 Связи между интегрируемостью по Риману и классическим кольцом частных

Захаров В. К. (проф. МГУ)

1. Выбор категории математических систем

Самым исходным объектом нашего исследования является семейство $C \equiv C_b(T)$ всех непрерывных (ограниченных) функций f на топологическом отрезке $T \equiv [a, b]$ с семейством открытых множеств $\mathcal{G}$.

На семействе C можно рассматривать следующие математические структуры: $+$, $\cdot_{\mathbb{R}}$, $\cdot$, $\vee$, $\wedge$ и пр.



Структуры $+$ и $\cdot$ связаны изящнейшим <u>законом дистрибутивности</u> $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$. Больше законов такого изящества на C нет. К сожалению, структуры $+$ и $\vee, \wedge$ связаны только лишь дистридутивным неравенством $f \wedge (g+h) \leq f \wedge g + f \wedge h$.

Рассмотрим математические системы: R-линейное кольцо $(C; +, \cdot_{R}, \cdot)$ и решёточное R-линейное пространство $(C; +, \cdot_{R}, \vee, \wedge)$. Для краткости последнюю математическую систему будем далее называть латминеалом.

Из разницы в законах дистрибутивности в кольце и в латминеале следует, что кольцо является более гармоничной и в некотором отношении более простой системой, чем латминеал.

Поэтому я в своих математических исследованиях сначала обратился к категории колец. Полученные результаты были опубликованы в ряде статей. Докторская диссертация по этим результатам была защищена в 1993 году. Затем я увлёкся теорией множеств и теорией меры и написанием математического трактата:

Zakharov V.K. Sets, functions, measures. Volume 1: Fundamentals of Set and Number Theory. – De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin. 68/1. 2018. – 428 p.

Zakharov V.K. Sets, functions, measures. Volume 2: Fundamentals of functions and measure theory. De Gruyter Studies in Mathematics. 68/2. Berlin. 2018. – 462 p.

После этого наступила возможность обратиться к более сложной категории латлинеалов. В сегодняшней книге в качестве исходных объектов рассматривается латлинеал $(C; +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$ и связанные с ним латлинеалы $(A; +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$.

Более того, поскольку латлинеал C обладает выделенной единицей $\mathbb{1}_C$, будем рассматривать только латлинеалы $(A; \mathbb{1}_A, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$ с выделенными <u>сильными единицами</u> $\mathbb{1}_A$, т.е. такими элементами, что $\forall a \in A \, (a > 0 \Rightarrow a \wedge \mathbb{1} > 0)$.

Более того, будем рассматривать с-подобные латлинеалы. Латлинеал $|A; \mathbb{1}_A|$ назовём с-латлинеалом, если A изоморфен некоторому латлинеалу $|C_в(H); \mathbb{1}|$ всех непрерывных ограниченных функций на некотором вполне регулярном топологическом пространстве H при сохранении единиц $\mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}$.

Абстрактная характеризация таких латлинеалов была дана М.Г. Крейном, С.Г. Крейном и Какутани.

Теорема Крейнов-Какутани. Пусть $|A; \mathbb{1}_A|$ - латлинеал с единицей. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) латлинеал $|A; \mathbb{1}_A|$ является с-латлинеалом;

2) латлинеал $|A; \mathbb{1}_A|$ обладает следующими свойствами:

а) $\forall a, b \in A \ (\forall n \in \mathbb{N} \ (na \leq b) \Rightarrow a \leq 0)$;

б) $\forall a \in A \ \exists n \in \mathbb{N} \ (|a| \leq n \mathbb{1}_A)$;

в) для любой последовательности $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$, такой, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|a_p - a_q| \leq \mathbb{1}/k$ для любых $p, q \geq n$, существует элемент $a \in A$ такой, что для любого $k \in N$ существует $n \in N$ такое, что $|a - a_p| \leq 1/k$ для любого $p \geq n$ (свойство равномерной полноты).

Далее мы будем рассматривать только категорию c-латлинеалов.

2. Расширение Римана

Пусть $RI \equiv (RI(T); +, \cdot_R, \vee, \wedge, 1)$ — латлинеал всех функций на T, интегрируемых по Риману (1867 год). Он порождает классическое расширение $C \subset RI$.

Где-то на рубеже 19-20 веков А. Лебегом была построена мера Лебега $\mu : M \to R_+$ с ансамблем M всех измеримых по мере μ множеств из T и с булеановым идеалом $M^0(\mu) \equiv \{X \subset T \mid \mu X = 0\}$ всех μ-пренебрежимых подмножеств из T. Через эту меру Лебегом было получено знаменитое функциональное описание семейства RI. Рассм. $F_b(T) \equiv \{f : T \to R \mid \exists r \in R\ (\forall t \in T\ (|f(t)| \leq r))\}$.

Теорема Лебега. Пусть $f \in F_b(T)$.

6 Тогда следующие рассуждения равносильны:

1) $f \in RI$;

2) множество всех точек из T, в которых функция f не является непрерывной, имеет лебегову меру нуль.

Эта теорема прекрасна, но совсем бесполезна, если мы рассматриваем связь между C и RI в категории латминеалов. В 1995 году я получил другое описание семейства RI, которое было включено в последнюю главу упомянутого выше трактата.

Обозначим через $\mathcal{U}^0$ ансамбль всех конульмножеств $\mathrm{coz}\, f = \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ всех функций $f \in C$. Через $\mathcal{U}^0$ обозначим подсемейство из $\mathcal{U}^0$, состоящее из всюду плотных конульмножеств $U \subset T$. А через $\mathcal{U}^0_\mu$ обозначаем подсемейство из $\mathcal{U}^0$, состоящее из множеств U полной меры, т.е. таких, что $\mu(T \setminus U) = 0$. Рассмотрим булеанов идеал $\mathcal{N}_\mu = \{N \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}^0_\mu \, (N \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных нуль-множеств τ_f нулевой меры.

Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP}_\mu = \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}^0 \; \exists N \in \mathcal{N}_\mu \; (P = G \cup N)\}$.

Скажем, что функция $f: T \to \mathbb{R}$ является <u>равномерной относительно $\mathcal{SP}_\mu$</u>, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное покрытие $(S_k \in \mathcal{SP}_\mu \mid k \in K)$, такое, что $\omega(f, S_k) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| \mid s, t \in S_k\} < 1/n$ для любого $k \in K$. Семейство всех таких функций обозначим через $U(T, \mathcal{SP}_\mu)$. Ясно, что $U(T, \mathcal{SP}_\mu) \subset F_b(T)$.

<u>Теорема 1 Захарова</u>. Пусть $f \in F_b(T)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $f \in RI_\mu$;

2) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;

3) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ и существует функция $f_n \in F_b(T)$ такая, что $f_n | U_n \in C_b(U_n)$ и $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ для любого $t \in U_n$;

4) существуют счётные коллекции

 $(g_i \in C \mid i \in I)$ и $(h_j \in C \mid j \in J)$ и последовательность $(U_n \in \mathcal{U}^0_\mu \mid n \in N)$, такие, что $g_i \leq f \leq h_j$ для любых i и j и для любого $n \in N$ и любого $t \in U_n$ существуют $i \in I$ и $j \in J$, такие, что $h_j(t) - g_i(t) < 1/n$.

Если $f, g \in F_b(T)$, то скажем, что $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$, если $\forall n \in N (\{t \in T \mid |g(t) - f(t)| \geq 1/n\} \in \mathcal{N}_\mu$.

<u>Лемма 1</u>. Пусть $f, g \in RI_\mu$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $f \sim g \bmod \mathcal{M}^0(\mu)$;

2) $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Рассмотрим множество $R \equiv RI/\mathcal{M}^0(\mu) = RI/\mathcal{N}_\mu$ классов $\bar{f}$ эквивалентности функций $f \in RI$ по любому из указанных идеалов. Тогда получаем инъективное отображение $u: C \rightarrowtail R$, такое, что $uc \equiv \bar{c}$ для любого $c \in C$. Назовём его <u>расширением Римана латминеала C</u>.

<u>Предложение 1</u>. Латминеал R является e-латминеалом.

3. Классическое кольцо частных и расширение Файна–Гиллмана–Ламбека

Вернёмся снова на много десятилетий назад. Тогда для некоторых колец было рассмотрено <u>классическое кольцо частных</u>. Рассмотрим его для кольца C.

Пусть $c, d \in C$ и конуль-множество $U \equiv \operatorname{coz} d$ плотно в T. Тогда существует функция $f \in F(T)$ такая, что $f(t) = c(t)/d(t)$ для любого $t \in U$ и $f|U \in C(U)$. Она называется <u>частным функций</u> c и d и обозначается через $\frac{c}{d}$. Функция $f \in F(T)$ называется <u>почти непрерывной</u>, если существует $U \in \mathcal{U}^0_m$ такое, что $f|U \in C(U)$. В алгебре было хорошо известно, что, если функция $f \in F(T)$ является почти непрерывной, то она является частным некоторых функций $c, d \in C$, т.е. $f = \frac{c}{d}$. Таким образом, с классическим кольцом частных $Q_{cl}(C)$ кольца C связан латтинеал $AC(T) \equiv AC$ всех почти непрерывных функций на T. Рассмотрим его <u>ограниченную часть</u> $AC_b \equiv AC \cap F_b(T)$.

Поскольку AC_b не является c-латлинеалом, Байн, Гелман и Ламбек в 1965 году рассмотрели равномерное пополнение $\overline{AC_b}$ латлинеала AC_b. Оно является c-латлинеалом. И они поставили задачу функционального описания c-латлинеала $\overline{AC_b}$. Эту задачу они решили только для бэровского пространства T. Для небэровского пространства она была открытой до 1982 года. В этом году я получил функциональное описание c-латлинеала $\overline{AC_b}$ для любого вполне регулярного пространства. Оно оказалось аналогичным функциональному описанию из теоремы 1.

Теорема 2 Захарова. Пусть $f \in F_b(T)$. Тогда следующие рассуждения равносильны:

1) $f \in \overline{AC_b}$;

2) $f \in \bar U(T, \mathcal{SP})$;

Рассмотрим булеанов идеал $\mathcal{N} = \{N \subset T \mid \exists U \in \mathfrak{U}^{o} (N \subset T \setminus U)\}$, состоящий из всех подмножеств нигде не плотных нуль-множеств zf для $f \in C$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{SP} = \{P \subset T \mid \exists G \in \mathcal{G}^0 \, \exists N \in \mathcal{N} \, (P = G \cup N)\}$. Рассмотрим семейство $U(T, \mathcal{SP})$ всех равномерных функций $f: T \to \mathbb{R}$ относительно семейства $\mathcal{SP}$.

3) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $U_n \in \mathcal{U}^0$ и существует функция $f_n \in F_B(T)$ такая, что $f_n | U_n \in C_B(U_n)$ и $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ для любого $t \in U_n$;

4) существуют счётные коллекции $(g_i \in C \mid i \in I)$ и $(h_j \in C \mid j \in J)$ и последовательность $(U_n \in \mathcal{U}^0 \mid n \in \mathbb{N})$, такие, что $g_i \le f \le h_j$ для любых i и j и для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $t \in U_n$ существуют $i \in I$ и $j \in J$, такие, что $h_j(t) - g_i(t) < 1/n$.

Рассмотрим множество $Z \equiv U(T, \mathcal{SP}) / \mathcal{N}$ классов $\bar{f}$ эквивалентности функций $f \in U(T, \mathcal{SP})$ по идеалу $\mathcal{N}$. Тогда получаем инъективное отображение $u: C \rightarrowtail Z$, такое, что $uc \equiv \bar{c}$ для любого $c \in C$. Назовём его расширением Файна-Гиллмана-Ламбека-Захарова латминала C.

 Предложение 2. Латминеал Z является c-латминеалом.

4. Выделение обобщённых порядковых свойств c-расширений Эрмана и Файна-Гиллмана-Ламбека-Захарова.

Выше мы построили два классических c-расширения $u: C \rightarrowtail R$ и $u: C \rightarrowtail Z$, сложных друг с другом. Поскольку мы рассматриваем категорию всех c-расширений $u: C \rightarrowtail A$, нам нужно из функциональных описаний, данных в теоремах 1 и 2, вытащить какие-то общие порядковые соотношения между c-латминеалами C и A.

Теорема 3. Пусть $A = R$ или $A = Z$. Пусть $a \in A$. Тогда для a существуют счётные множества $P \subset C$ и $Q \subset C$, обладающие следующими свойствами:

1) $p \leq q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$ и $a = \sup P = \inf Q$ в A (свойство граничности счётного сечения (P, Q));

2) для любого $x \in A_+$ и для любого $n \in N$ из соотношения $\forall p \in P \; \forall q \in Q ($

13 $(\frac{1}{n}\mathbb{1}+p-q)_+ \wedge x=0)$ следует равенство $x=0$ (свойство порядковой плотности счётного сечения (L, R))

Если теперь попытаться выделенные свойства применить для доказательства существования границы $a=\sup L=\inf R$ в произвольном счётном порядково плотном сечении (L, R) в R или в Z, то ничего не получается. Мне не удалось ничего доказать.

Это показало, что для различения близких c-расширений $C \rightarrowtail R$ и $C \rightarrowtail Z$ нужно ещё какое-то неизвестное и тонкое свойство, которое не было описано в математической литературе. Такое свойство для категории c-кольцевых расширений было выделено мною в статье 1987 года, опубликованной в ДАН СССР.

Обобщённая идея состоит в том, что недостаточно следить за близостью элементов a и b из A в целом. Надо следить за их близостью в некоторой совокупности отдельных мест. Формализуем эту общую идею про совокупность

14 отдельных мест в категории с-латинеальных расширений.

Напомним, что самым исходным объектом нашего рассмотрения является топологическое пространство $T \equiv [a, b]$, оснащённое разными дополнительными структурами.

В первом случае мы рассмотрим в качестве дополнительной структуры меру Лебега $\mu : T \to R_+$. Эта структура является слишком сложной. Свяжем с ней гораздо более простую структуру.

Компактное множество $E \subset T$ назовём μ-компактным, если $\forall G \in \mathcal{G}$ ($G \cap E \neq \emptyset \Rightarrow G \cap E \notin \mathcal{M}^0(\mu)$). Для любого непустого компактного множества $K \subset T$ ~~существует~~ ненулевой меры существует непустое μ-компактное ядро $E \equiv K \setminus \bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \cap K \in \mathcal{M}^0(\mu)\}$ такое, что $K \setminus E \in \mathcal{M}^0(\mu)$.

Ансамбль всех μ-компактных подмножеств из T обозначим через Δ_μ. Множество $\bigcup(E \mid E \in \Delta_\mu)$ плотно в T. Элемент $E \in \Delta_\mu$ назовём вершиной компании $(E_\xi \in \Delta_\mu \mid \xi \in \tilde{\Pi})$, если $E_\xi \subset$

 E для любого ξ и для любого $L \in \Delta_\mu$ такого, что $\varnothing \neq L \subset E$ существует ξ_0 и существует $M \in \Delta_\mu$, такие, что $\varnothing \neq M \subset L$ и $M \subset E_{\xi_0}$. Обозначим $E = top(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$.

Пусть A – произвольный c-латминеал и $\mathcal{C}(A)$ – ансамбль всех замкнутых решёточных идеалов в A относительно равномерной сходимости последовательностей $(a_n \in A \mid n \in \mathbb{N})$, задаваемой сильной единицей $\mathbb{1}_A$. Коллекцию $\mathfrak{A} = (A_E \in \mathcal{C}(A) \mid E \in \Delta_\mu)$ назовём *μ-компактным измельчением* *c-латминеала* A, если:

а) $A_E = A$, если и только если $E = \varnothing$;
б) $\cap (A_E \mid E \in \Delta_\mu) = \{0\}$;
в) $E_1 \subset E_2$ влечёт $A_{E_1} \supset A_{E_2}$;
г) $E = top(E_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_E = \cap (A_{E_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

c-Латминеал A с μ-компактным измельчением $\mathfrak{A}$ назовём $cч_\mu$-*латминеалом* и обозначим через $(A, \mathfrak{A})$.

На исходном c-линеале C рассмотрим исходное фиксированное μ-компактное измельчение $\mathcal{L}_\mu \equiv (C_E \in \mathcal{C}(C) \mid E \in \Delta_\mu)$, такое, что $C_E \equiv \{c \in C \mid \operatorname{coz} c \cap E = \emptyset\}$.

Рассмотрим c-расширение $u : C \rightarrowtail A$ такое, что $(C, \mathcal{L}_\mu)$ и $(A, \mathfrak{A})$ являются сч$_\mu$-латминеалами. Это расширение $u : (C, \mathcal{L}_\mu) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$ назовём *сч$_\mu$-расширением исходного сч$_\mu$-минеала* $(C, \mathcal{L}_\mu)$, если:

а) $u[C_E] \subset A_E$ для любого $E \in \Delta_\mu$;

б) $uc \in A_E$ влечет $c \in A_E$.

С помощью введения новой математической структуры измельчения на c-латминеалах и переходу к подкатегории сч$_\mu$-латминеальных расширений $u : (C, \mathcal{L}_\mu) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$ можно ввести более тонкие порядковые свойства.

5. Выделение тонких порядковых свойств в сч$_\mu$-расширении Дилмана и Файна-Гиллмана-Ламбека-Захарова

Рассмотрим на R μ-компактное измельчение $\mathfrak{A}_\mu \equiv (R_E \in \mathcal{C}(R) \mid E \in \Delta_\mu)$ такое, что $R_E \equiv \{f \in R \mid \forall n \in \mathbb{N} (\operatorname{coz}_n f \cap E \in \mathcal{N}_\mu)\}$, где $\operatorname{coz}_n f \equiv \{t \in T \mid |f(t)| > 1/n\}$.

17 Будем далее рассматривать $c\tau_\mu$-расширение Римана $u: (C, \mathcal{L}_\mu) \twoheadrightarrow (R, \mathcal{O}_\mu)$. Пусть $u: (C, \mathcal{L}_\mu) \twoheadrightarrow (A, \mathcal{O})$ — произвольное $c\tau_\mu$-расширение.

Если P и Q — непустые подмножества в A, то пару (P, Q) назовём (порядковым) сечением в A, если $p \le q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$ и $\inf\{q - p \mid p \in P \;\&\; q \in Q\} = 0$.

Если $a \in A$, то $a = \sup P$ равносильно тому, что пара $(P, \{a\})$ является сечением. Аналогично, $a = \inf Q$ равносильно тому, что пара $(\{a\}, Q)$ является сечением.

Пару (P, Q) назовём τ-плотной, если для любого $E \in \mathcal{A}_\mu$, любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из $\forall p \in P \,\forall q \in Q\, ((\frac{1}{n} \mathbb{1}_A + p - q)_+ \wedge x \in A_E)$ следует $x \in A_E$. Из второго свойства измельчения следует, что τ-плотная пара является плотной. τ-Плотное сечение (P, Q) в A назовём τ-сечением.

Элемент $a \in A$ назовём τ-супремумом множества P, если пара $(P, \{a\})$ является τ-сечением. Обозначим это свойство через $a = \text{ч-sup}\, P$. Аналогично определяется $a = \text{ч-inf}\, Q$.

<u>Лемма</u>. Пусть (P, Q) — ч-сечение в A. Тогда $a = \text{ч-sup}\, P$ равносильно $a = \text{ч-inf}\, Q$.

Множество $P \subset A$ назовём <u>ч-дополняемым в A</u> <u>множеством</u> $Q \subset A$, если пара (P, Q) является ч-сечением.

Пусть в сч_μ-латлинеале $(A, \mathfrak{A})$ выделено подмножество B. ~~подмножеств~~ Ансамбль всех ограниченных сверху в A подмножеств $P \subset B$ обозначим через $\mathcal{P}_b(B, A)$. Ансамбль всех счётных подмножеств $P \in \mathcal{P}_b(B, A)$ обозначим через $\mathcal{P}_b^0(B, A)$, а ансамбль всех подмножеств $P \in \mathcal{P}_b^0(B, A)$, ч-дополняемых в A некоторыми счётными подмножествами $Q \subset B$, обозначим через $\mathcal{P}_b^{0c}(B, A)$.

сч_μ-Латлинеал $(A, \mathfrak{A})$ назовём <u>полным типа Z^{0c}</u> <u>относительно B</u>, если любое множество $P \in \mathcal{P}_b^{0c}(B, A)$ имеет в A ч-супремум. При $B = A$ получаем определение <u>(абсолютно)</u> <u>полного типа</u> <u>Z^{0c} сч_μ-латлинеала</u> $(A, \mathfrak{A})$. сч_μ-Расширение $u : (C, \mathfrak{L}_\mu) \to (A, \mathfrak{A})$ назовём <u>полным типа</u> Z^{0c}, если A является

19 полным типа $L^{\vee c}$ относительно подмножества $u[C]$. $сч_м$-Расширение $u:(C, \mathcal{L}_м) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$ назовём полным типа ${}^{a}Z^{Oc}$, если $сч_м$-латлинеал $(A, \mathfrak{A})$ является полным типа ${}^{a}Z^{Oc}$.

Элемент $a \in A$ назовём граничным типа Z^{Oc} относительно B, если существует множество $P \in \mathcal{P}_в^{Oc}(B, A)$, такое, что $a = ч\sup P$. Рассмотрим в A c-подлатлинеал $Z^{Oc}(B, A)$, порождённый множеством всех граничных элементов типа Z^{Oc} относительно B.

$сч_м$-Расширение $u:(C, \mathcal{L}_м) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$ назовём граничным $сч_м$-расширением типа Z^{Oc} $сч_м$-латлинеала $(C, \mathcal{L}_м)$, если $A = Z^{Oc}(u[C], A)$.

$сч_м$-Пополнением типа $Z^{Oc} | {}^{a}Z^{Oc}$ $сч_м$-латлинеала $(C, \mathcal{L}_м)$ назовём $сч_м$-расширение $u:(C, \mathcal{L}_м) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$, которое является:

а) наибольшим из всех граничных $сч_м$-расширений типа Z^{Oc} $сч_м$-латлинеала $(C, \mathcal{L}_м)$;

б) наименьшим из всех полных $сч_м$-расширений типа Z^{Oc} $сч_м$-латлинеала $(C, \mathcal{L}_м)$;

в) полным типа ${}^aZ^{uc}$.

Если свойство в) отсутствует, то определяется сч$_\mu$-<u>пополнение типа Z^{0c}</u>.

<u>Теорема 4</u>. сч$_\mu$-Расширение Римана $u: (C, \mathcal{L}_\mu) \rightarrowtail (R, \mathfrak{A}_\mu)$ является единственным сч$_\mu$-пополнением сч$_\mu$-латтинеала $(C, \mathcal{L}_\mu)$ типа $Z^{0c}/{}^aZ^{0c}$.

Пусть Λ_b – фиксированная открытая π-база в пространстве $(T, \mathcal{G})$, т.е. ансамбль открытых множеств, такой, что $\forall G \in \mathcal{G} \ \exists D \in \Lambda_b \ (D \subset G)$. Наделим его порядком по вложению. Рассмотрим на C <u>базисное измельчение</u> $\mathcal{L}_b \equiv (C_D \in \mathcal{C}(C) \mid D \in \Lambda_b)$, такое, что $C_D \equiv \{c \in C \mid \operatorname{coz} c \cap \operatorname{cl} D = \varnothing\}$. Рассмотрим на Z базисное измельчение $\mathfrak{A}_b \equiv (Z_D \in \mathcal{C}(Z) \mid D \in \Lambda_b)$, такое, что $Z_D \equiv \{f \in Z \mid \forall n \in N \ (\operatorname{coz}_n f \cap \operatorname{cl} D \in \mathcal{N})\}$.

Будем далее рассматривать сч$_b$-расширение Хайна-Гиллмана-Ламбека-Захарова $u: (C, \mathcal{L}_b) \rightarrowtail (Z, \mathfrak{A}_b)$.

<u>Теорема 5</u>. сч$_b$-Расширение $u: (C, \mathcal{L}_b) \rightarrowtail (Z, \mathfrak{A}_b)$ является единственным сч$_b$-пополнением сч$_b$-латтинеала $(C, \mathcal{L}_b)$ типа $Z^{0c}/{}^aZ^{0c}$.