Расширение Лебега и расширение Бореля первого класса

Захаров В.К. (проф. МГУ)

В первой части было охарактеризовано расширение Римана $r : C \rightarrowtail R$ семейства C всех непрерывных (ограниченных) функций на топологическом отрезке $T \equiv [a, b]$, порождённое семейством RI всех функций $f : T \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Риману.

Следующим важным и интересным расширением семейства C является расширение Лебега $r : C \rightarrowtail L_\mu$, порождённое семейством LM_μ всех ограниченных μ-измеримых функций $f : T \to \mathbb{R}$.

Для его характеризации придётся обобщить материал, изложенный в первой части.

1. Классическое c-расширение Лебега.

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — фиксированное вполне регулярное (тихоновское) топологическое пространство с ансамблем $\mathcal{G}$ всех открытых множеств из T.

2 Исходным объектом нашего исследования является латлинеал $C \equiv C_b(T) \equiv C_b(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных ограниченных функций на топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$.

Далее будем рассматривать категорию $u : C \rightarrowtail A$ с-расширений с-латлинеала $(C; \mathbb{1}_C, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$, составленную из с-латлинеалов $(A; \mathbb{1}_A, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \vee, \wedge)$ и инъективных латлинеальных морфизмов, сохраняющих все указанные структуры.

Выделим в этой категории первое важное классическое расширение.

Пусть $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ - положительная ограниченная радоновская мера на топологическом пространстве $(T, \mathcal{G})$, т.е. счётно-аддитивная компактно-регулярная функция на σ-алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств пространства $(T, \mathcal{G})$. Будем далее предполагать, что $T = \operatorname{supp} \mu$, т.е. $\forall G \in \mathcal{G} \, (G \neq \emptyset \Rightarrow \mu G > 0)$.

Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{L}M_\mu$ всех μ-измеримых множеств из T и тонкий σ-[illegible] ансамбль $\mathcal{L}N_\mu$ всех

3 μ-измеримых множеств μ-меры нуль.

Рассмотрим латминеал $LM_\mu \equiv M_B(T, \mathcal{L}M_\mu)$ всех ограниченных ~~из~~ измеримых относительно ансамбля $\mathcal{L}M_\mu$ функций $f : T \to \mathbb{R}$, т.е. таких, что $f^{-1}[\,]x,y[\,] \in \mathcal{L}M_\mu$ для любого открытого отрезка $]x,y[\subset \mathbb{R}$. Рассмотрим латминеал $L_\mu \equiv LM_\mu / \mathcal{L}N_\mu$ классов $f \bmod \mathcal{L}N_\mu$ функций эквивалентности $f \in LM_\mu$ по идеалу $\mathcal{L}N_\mu$. Он является с-латминеалом, т.е. L_μ изоморфно латминеалу $C_B(H)$ всех непрерывных ограниченных функций на некотором вполне регулярном пространстве H.

Функционально-факторное расширение $u : C \rightarrowtail L_\mu$, такое, что $uc \equiv \bar{c}$ для любого $c \in C$, назовём с-расширением Лебега с-латминеала C.

В отличие от одноступенчатого с-расширения Римана с-расширение Лебега является двухступенчатым, что отражено в методе Юнга — Даниэля построения интеграла по мере μ. Поэтому нам необходимо обобщение многих ... введённых в первой части

2. Категории сч-расширений

Выделим в категории с-расширений $u: C \rightarrowtail A$ подкатегорию с-расширений с измельчениями

Пусть Δ - некоторое упорядоченное множество с наименьшим элементом 0. Элемент $\lambda \in \Delta$ назовём <u>вершиной коллекции</u> $(\lambda_\xi \in \Delta \,/\, \xi \in \Xi)$, если $\lambda_\xi \leq \lambda$ для любого ξ и для любого $0 < \mu \leq \lambda$ существуют ξ_0 и ν такие, что $0 < \nu \leq \mu$ и $\nu \leq \lambda_{\xi_0}$. Обозначим через $\lambda = top(\lambda_\xi \,/\, \xi \in \Xi)$.

Пусть A - произвольный с-латминеал и $\mathcal{C}(A)$ - ансамбль всех замкнутых решёточных линейных идеалов в A, т.е. замкнутых относительно равномерной сходимости последовательностей $(a_n \in A \,/\, n \in \mathbb{N})$, задаваемой сильной единицей $\mathbb{1}_A$ (см. теорему Крейнов-Какутани из первого раздела первой части).

Коллекцию $\mathfrak{A} \equiv (A_\lambda \in \mathcal{C}(A) \,/\, \lambda \in \Delta)$ назовём <u>измельчением</u> с-<u>латминеала</u> A, если:

a) $A_\lambda = A$, если и только если $\lambda = 0$;

б) $\cap(A_\lambda \mid \lambda \in \Delta) = \{0\}$;

в) $\lambda \leq \mu$ влечёт $A_\lambda \supset A_\mu$;

г) $\lambda = \mathrm{top}(\lambda_\xi \mid \xi \in \Xi)$ влечёт $A_\lambda = \cap(A_{\lambda_\xi} \mid \xi \in \Xi)$.

с-Латминеал A с измельчением $\mathfrak{A}$ назовём *сч-латминеалом* и обозначаем через $(A, \mathfrak{A})$.

На исходном с-латминеале C рассмотрим фиксированное измельчение $\mathfrak{L} \equiv (C_\lambda \in \mathcal{C}(C) \mid \lambda \in \Delta)$. Будем далее рассматривать исходный фиксированный сч-латминеал $(C, \mathfrak{L})$.

Рассмотрим с-расширение $u: C \twoheadrightarrow A$, такое, что $(A, \mathfrak{A})$ является сч-латминеалом. Назовём это с-расширение *сч-расширением сч-латминеала* $(C, \mathfrak{L})$, если $C_\lambda = u^{-1}[A_\lambda]$ для любого $\lambda \in \Delta$. Такое расширение будем далее обозначать через $u: (C, \mathfrak{L}) \twoheadrightarrow (A, \mathfrak{A})$.

Морфизмом из $u: (C, \mathfrak{L}) \twoheadrightarrow (A, \mathfrak{A})$ в $\hat{u}: (C, \mathfrak{L}) \twoheadrightarrow (\hat{A}, \hat{\mathfrak{A}})$ назовём с-латминеальный гомоморфизм $v: A \to \hat{A}$, такой, что $v \circ u = \hat{u}$ и $v[A_\lambda] \subset \hat{A}_\lambda$ для любого $\lambda \in \Delta$. Если вдобавок гомоморформ v инъективен и $A_\lambda = v^{-1}[\hat{A}_\lambda]$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то скажем, что второе сч-расширение больше первого.

3. Элементарные типы полноты и граничности

Пусть $u: (C, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow (A, \mathfrak{A})$ — произвольное сч-расширение.

Если P и Q — непустые подмножества в A, то пару (P, Q) назовём (порядковым) сечением в A, если $p \le q$ для любых $p \in P$ и $q \in Q$ и $\inf\{q - p \mid p \in P \,\&\, q \in Q\} = 0$.

Если $a \in A$, то равенство $a = \sup P$ равносильно тому, что пара $(P, \{a\})$ является сечением. Аналогично, $a = \inf Q$ равносильно тому, что пара $(\{a\}, Q)$ является сечением.

Пару (P, Q) назовём ч-плотной, если для любого $\lambda \in \Lambda$, любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\frac{1}{n}\mathbb{1}_A + p - q)_+ \wedge x \in A_\lambda)$ следует $x \in A_\lambda$. Из второго свойства измельчения следует, что ч-плотная пара является плотной, т.е. такой, что для любого $x \in A_+$ и любого $n \in \mathbb{N}$ из $\forall p \in P\ \forall q \in Q\ ((\frac{1}{n}\mathbb{1}_A + p - q)_+ \wedge x = 0)$ следует $x = 0$.

r-Плотное сечение (P, Q) в A назовём *r-сечением*.

Элемент $a \in A$ назовём *r-супремумом множества* P, если пара $(P, \{a\})$ является r-сечением. Обозначим это свойство через $a = r\text{-}\sup P$. Элемент $a \in A$ назовём *r-инфимумом множества* Q, если пара $(\{a\}, Q)$ является r-сечением. Обозначим это свойство через $a = r\text{-}\inf Q$.

Лемма. Пусть (P, Q) – r-сечение в A. Тогда $a = r\text{-}\sup P$ равносильно $a = r\text{-}\inf Q$.

Множество $P \subset A$ назовём *r-дополняемым в A множеством* $Q \subset A$, если пара (P, Q) является r-сечением.

Пусть в сн-латминеале $(A, \mathfrak{A})$ выделено подмножество B. Ансамбль всех ограниченных сверху в A подмножеств $P \subset B$ обозначим через $\mathcal{P}_b(B, A)$. Ансамбль всех счётных подмножеств $P \in \mathcal{P}_b(B, A)$ обозначим через $\mathcal{P}_b^0(B, A)$. Ансамбль всех подмножеств $P \in \mathcal{P}_b$

8 (B, A), ч-дополняемых в A некоторыми множествами $Q \subset B$, обозначим через $\mathcal{P}_в^c(B, A)$. Наконец, ансамбль всех подмножеств $P \in \mathcal{P}_в^0(B, A)$, ч-дополняемых в A некоторыми счётными подмножествами $Q \subset B$, обозначим через $\mathcal{P}_в^{0c}(B, A)$.

Далее через π будем обозначать один из символов: $\varnothing$, c, 0 и $0c$; при этом условимся символ $\varnothing$ в индексе опускать.

сч-Латлинеал $(A, \mathfrak{A})$ назовём <u>полным типа Z^{π} относительно</u> B, если любое множество $P \in \mathcal{P}_в^{\pi}(B, A)$ имеет в A ч-супремум. При $B = A$ получаем определение (<u>абсолютно</u>) <u>полного типа</u> $^aZ^{\pi}$ сч-<u>латлинеала</u> $(A, \mathfrak{A})$. сч-Расширение $u : (C, \mathcal{L}) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$ назовём <u>полным типа</u> $^aZ^{\pi}$, если сч-латлинеал $(A, \mathfrak{A})$ является полным типа $^aZ^{\pi}$. ~~относительно~~ Элемент $a \in A$ назовём <u>граничным типа Z^{π} относительно</u> B, если существует множество $P \in \mathcal{P}_в^{\pi}(B, A)$, такое, что $a =$ ч-$\sup P$. Рассмотрим в A с-подлатлинеал $Z^{\pi}(B, A)$, порождённый мно-

9 жеством всех граничных элементов типа Z^{π} относительно B.

4. Ступенчатые типы полноты и граничности

Пусть $u:(C,\mathcal{L})\twoheadrightarrow(A,\mathcal{O})$ – произвольное сч-расширение.

Рассмотрим слово $Z^{\pi_1}\ldots Z^{\pi_k}$ с числом ступеней $k\in\mathbb{N}$. Определим по индукции в A возрастающие с-подлатлинеалы $A_0\equiv u[C]$, $A_1\equiv Z^{\pi_1}(A_0,A),\ldots,$ $A_{i+1}\equiv Z^{\pi_{i+1}}(A_i,A),\ldots,A_k\equiv Z^{\pi_k}(A_{k-1},A)$.

сч-Расширение $u:(C,\mathcal{L})\twoheadrightarrow(A,\mathcal{O})$ назовём полным (ступенчатого) типа $Z^{\pi_1}\ldots Z^{\pi_k}$, если сч-латлинеал $(A,\mathcal{O})$ является полным типа Z^{π_i} относительно подмножества A_{i-1} для любого $i=1,\ldots,k$.

сч-Расширение $u:(C,\mathcal{L})\twoheadrightarrow(A,\mathcal{O})$ назовём граничным сч-расширением (ступенчатого) типа $Z^{\pi_1}\ldots Z^{\pi_k}$ сч-латлинеала $(C,\mathcal{L})$, если $A=A_k$.

сч-Пополнением (ступенчатого) типа $Z^{\pi_1}\ldots Z^{\pi_k}\,|\,{}^aZ^{\pi}$ сч-латлинеала $(C,\mathcal{L})$

назовём сч-расширение $u: (C, \mathfrak{L}) \rightarrowtail (A, \mathfrak{A})$, которое является:

а) наибольшим из всех граничных сч-расширений типа $Z^{\pi_1} \dots Z^{\pi_k}$ сч-латминеала $(C, \mathfrak{L})$;

б) наименьшим из всех полных сч-расширений типа $Z^{\pi_1} \dots Z^{\pi_k}$ сч-латминеала $(C, \mathfrak{L})$;

в) полным типа ${}^aZ^{0_c}$.

Если свойство в) отсутствует, то определяется сч-пополнение (ступенчатого) типа $Z^{\pi_1} \dots Z^{\pi_k}$.

5. Характеризация расширения Лебега

Компактное множество $E \subset T$ назовём μ-компактным, если $\forall G \in \mathcal{G}$ $(G \cap E \neq \emptyset \Rightarrow G \cap E \notin \mathcal{L}N_\mu)$. Для любого компактного множества $K \subset T$ ненулевой меры μ существует непустое μ-компактное ядро $E \equiv K \setminus \cup \{ G \in \mathcal{G} \mid G \cap K \in \mathcal{L}N_\mu \}$ такое, что $K \setminus E \in \mathcal{L}N_\mu$.

Ансамбль всех μ-компактных подмножеств из T обозначим через Λ.

На исходном с-минеале C рас-

11 смотрим исходное фиксированное μ-компактное измельчение $\mathfrak{L}_\mu \equiv (C_E \in \mathcal{C}(C) \mid E \in \Lambda_\mu)$, такое, что $C_E \equiv \{c \in C \mid \operatorname{coz} c \cap E = \emptyset\}$.

Рассмотрим на L_μ μ-компактное измельчение $\mathfrak{A}_\mu \equiv (L_{\mu E} \in \mathcal{C}(L_\mu) \mid E \in \Lambda_\mu)$, такое, что $L_{\mu E} \equiv \{f \in L_\mu \mid \operatorname{coz} f \cap E \in \mathcal{L}\mathcal{N}_\mu\}$.

Будем далее рассматривать $сч_\mu$-расширение Лебега $u : (C, \mathfrak{L}_\mu) \twoheadrightarrow (L_\mu, \mathfrak{A}_\mu)$.

<u>Теорема 1</u>. $сч_\mu$-Расширение Лебега $u : (C, \mathfrak{L}_\mu) \twoheadrightarrow (L_\mu, \mathfrak{A}_\mu)$ является единственным $сч_\mu$-пополнением $сч_\mu$-латминеала $(C, \mathfrak{L}_\mu)$ типа $Z^0 Z^{0c} \mid {}^a Z^{0c}$ и типа $Z Z^{0c} \mid {}^a Z^{0c}$.

6. Характеризация расширений Бореля и Бэра первого класса

Через $\mathcal{B}$ [соответственно $\mathcal{B}^0$] обозначим булеанову σ-алгебру всех <u>борелевских</u> [<u>бэровских</u>] подмножеств из T, т.е. наименьший ансамбль в булеане $\mathcal{P}(T)$, содержащий ансамбль $\mathcal{G}$ $[\mathcal{G}^0]$ и замкнутый относительно операцию счётного объединения, счётного пересечения и дополнения в $\mathcal{P}(T)$.

Для бэровских множеств имеет место следующая классификация Юнга-Хаусдорфа: $\mathcal{B}^0 = \bigcup(\mathcal{F}^0_\alpha \mid \alpha \in [1, \omega_1[) = \bigcup(\mathcal{G}^0_\alpha \mid \alpha \in [1, \omega_1[)$, где $\mathcal{F}^0 \equiv \text{co-}\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{F}^0_1 \equiv \mathcal{F}^0_\sigma \subset \mathcal{F}^0_2 \equiv \mathcal{F}^0_{\sigma\delta} \subset \ldots$ и $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}^0_1 \equiv \mathcal{G}^0_\delta \subset \mathcal{G}^0_2 \equiv \mathcal{G}^0_{\delta\sigma} \subset \ldots$. Мультипликативные семейства $\mathcal{F}^0_\alpha$ для нечётных α и $\mathcal{G}^0_\alpha$ для чётных α обозначим через $\mathcal{B}^0_\alpha$.

Рассмотрим c-латтинеалы $BM^0 \equiv M_b(T, \mathcal{B}^0)$ и $BM^0_\alpha \equiv M_b(T, \mathcal{B}^0_\alpha)$. Функциональные c-расширения $C \rightarrowtail BM^0$ и $C \rightarrowtail BM^0_\alpha$ называются соответственно <u>расширением Бэра</u> и <u>расширением Бэра класса $\alpha \in \omega_1$</u>.

К сожалению, приведённые построения и приведённая классификация Юнга-Хаусдорфа переносятся на борелевские множества только для совершенных топологических пространств $(T, \mathcal{G})$, в которых открытые множества имеют тип F_σ. Поэтому для произвольных топологических пространств $(T, \mathcal{G})$ мною и А. В. Колдуновым была введена следующая классификация борелевских множеств, которая в случае совершенных пространств совпадает с классификацией Юнга - Хаусдорфа.

Определим по индукции борелевские ансамбли класса $\alpha < \omega_1$ следующим образом: $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{G}$, $\mathcal{B}_\alpha$ состоит из всех множеств $B \subset T$, для которых существуют последовательности $(B_n \in \cup(\mathcal{B}_\beta \mid \beta < \alpha) \mid n \in \mathbb{N})$ и $(B_n' \in \cup(\mathcal{B}_\beta \mid \beta < \alpha) \mid n \in \mathbb{N})$, такие, что $B = \cup(B_n \cap (T \setminus B_n') \mid n \in \mathbb{N})$.

Теорема Захарова-Колдунова. Пусть $(T, \mathcal{G})$ - произвольное топологическое пространство. Тогда $\mathcal{B} = \cup(\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha < \omega_1)$.

Эта классификация была включена в трактат, упомянутый в первой части.

Множество $BM_1^0 \equiv M_b(T, \mathcal{B}_1^0)$ всех ограниченных функций, измеримых относительно ансамбля $\mathcal{B}_1^0$ бэровских множеств первого класса, назовём се-

семейством функций, измеримых по Бэру первого класса.

Множество $BM_1 \equiv M_b(T, \mathcal{B}_1)$ всех ограниченных функций, измеримых относительно ансамбля $\mathcal{B}_1$ борелевских множеств первого класса, назовём *семейством функций, измеримых по Борелю первого класса.*

Указанные семейства являются c-латминеалами относительно поточечных операций. c-Расширения $u : C \twoheadrightarrow BM_1^0$ и $u : C \twoheadrightarrow BM_1$ назовём *расширениями Бэра* и, соответственно, *Бореля* первого класса.

Пусть Δ_p обозначает ансамбль всех не более чем одноточечных подмножеств из T. Наделим его порядком по вложению.

На исходном c-минеале C рассмотрим исходное фиксированное точечное измельчение $\mathfrak{L}_p \equiv (C_\lambda \in \mathcal{C}(C) / \lambda \in \Delta_p)$, такое, что $C_\varnothing \equiv C$ и $C_{\{t\}} \equiv \{c \in C / \{t\} \cap \operatorname{coz} c = \varnothing\}$ для любого $t \in T$.

Рассмотрим на BM_1^0 точечное измель-

15 $\mathfrak{A}_p^0 \equiv (BM_{1\lambda}^0 \in \mathcal{C}(BM_1^0) \mid \lambda \in \Delta_p)$, такое, что $BM_{1\emptyset}^0 \equiv BM_1^0$ и $BM_{1\{t\}}^0 \equiv \{f \in BM_1^0 \mid \{t\} \cap \operatorname{coz} f = \emptyset\}$ для любого $t \in T$. На BM_1 рассмотрим аналогичное точечное измельчение $\mathfrak{A}_p$.

Далее будем рассматривать $c\tau_p$-расширение Бэра $u: (C, \mathfrak{L}_p) \twoheadrightarrow (BM_1^0, \mathfrak{A}_p^0)$ первого класса и $c\tau_p$-расширение Бореля $u: (C, \mathfrak{L}_p) \twoheadrightarrow (BM_1, \mathfrak{A}_p)$ первого класса.

<u>Теорема 2.</u> 1) $c\tau_p$-Расширение Бэра $u: (C, \mathfrak{L}_p) \twoheadrightarrow (BM_1^0, \mathfrak{A}_p^0)$ первого класса является единственным $c\tau_p$-пополнением $c\tau_p$-линеала $(C, \mathfrak{L}_p)$ типа $Z^0 Z^{0c} \mid {}^a Z^{0c}$.

2) $c\tau_p$-Расширение Бореля $u: (C, \mathfrak{L}_p) \twoheadrightarrow (BM_1, \mathfrak{A}_p)$ первого класса является $c\tau_p$-пополнением единственным $c\tau_p$-линеала $(C, \mathfrak{L}_p)$ типа $Z Z^{0c} \mid {}^a Z^{0c}$.

Таким образом, расширения Лебега и Бореля [Бэра] первого класса являются пополнениями с-латлинеала C одинакового ступенчатого типа. Их удалось различить только благодаря выбору различных исходных измельчений $\mathfrak{L}_m$ и $\mathfrak{L}_p$